Exercice 1:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $2\mathbf{e}^{4x} - 5\mathbf{e}^{2x} + 2 = 0 \iff 2y^2 - 5y + 2 = 0$ où $y = \mathbf{e}^{2x}$. Résolvons cette équation.
   $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$. Il y a donc 2 racines réelles : $y_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ et $y_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
   Cela donne deux solutions : $x_1 = \frac{1}{2}\ln(2)$ et $x_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

2. La fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc on sait que cette équation admet une unique solution.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathrm{sh}(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} = 4 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 1 = 0$ où $y = \mathbf{e}^x$.
   $\Delta = 16 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2 > 0$.
   Il y a donc deux racines réelles : $y_1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$ et $y_2 = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$.
   Or, $y_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$ donc cette solution est impossible car $y_2 > 0$.
   Finalement, il n'y a qu'une solution pour l'équation de base : $x_1 = \ln(2 + \sqrt{5})$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $4\mathrm{ch}(x) + 3\mathrm{sh}(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}) + \frac{3}{2}(\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}) - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{7\mathbf{e}^x}{2} + \frac{\mathbf{e}^{-x}}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 7y^2 - 8y + 1 = 0$ où $y = \mathbf{e}^x$. $\Delta = 64 - 28 = 36 = 6^2 > 0$ donc il y a deux racines : $y_1 = \frac{8+6}{14} = 1$ et $y_2 = \frac{8-6}{14} = \frac{1}{7}$.
   Il y a donc deux solutions : $x_1 = \ln(1) = 0$ ou $x_2 = \ln\left(\frac{1}{7}\right) = -\ln(7)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow 2^{2x} \times \frac{3}{2} = 3^x \times \frac{4}{\sqrt{3}}$
   $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$. Or, la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc
   $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$.

5. On remplace les fonctions ch et sh par leur définition : $\begin{cases} \frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathbf{e}^y+\mathbf{e}^{-y}}{2} = 4 \\ \frac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathbf{e}^y-\mathbf{e}^{-y}}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^y + \mathbf{e}^{-y} = 8 \\ \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^y - \mathbf{e}^{-y} = 2 \end{cases}$.
   $\underset{L_1+L_2//L_1-L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\mathbf{e}^x + 2\mathbf{e}^y = 10 \\ 2\mathbf{e}^{-x} + 2\mathbf{e}^{-y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^y = 5 \\ \mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{-y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + t = 5 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 3 \end{cases}$ où $z = \mathbf{e}^x$ et $t = \mathbf{e}^y$
   $\Rightarrow \begin{cases} z + t = 5 \\ \frac{z+t}{zt} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + t = 5 \\ zt = \frac{5}{3} \end{cases}$
   Or, par le lien entre les racines et les coefficients d'un polynômes, on en déduit que z et t sont les deux racines du polynôme $X^2 - 5X + \frac{5}{3} = 0$.
   On trouve les racines de ce polynôme et on leur applique la fonction ln pour trouver les solutions de l'équation initiale.

Exercice 2: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = (\mathbf{e}^x)^n = \mathbf{e}^{nx} = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

Exercice 3: Soit $z \in \mathbb{C}$, $2^z = \mathbf{i} \iff \mathbf{e}^{z\ln(2)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} \iff z\ln(2) = \mathbf{i}\frac{\pi}{2}[2\mathbf{i}\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \frac{(4k+1)\pi}{2\ln(2)}\mathbf{i}$

Exercice 4:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = \ln((x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x)) = \ln(1 + x^2 - x^2) = \ln(1) = 0$.

2. Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy) = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$
   Les solutions du système d'équations sont donc les deux solutions du polynôme $X^2 - 4X + 1 = 0$.
   Donc, $S = \left\{(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}); (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})\right\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} = \mathbf{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$ car $x \mapsto \mathbf{e}^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \dfrac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$

<u>Exercice 5</u>: Notons f la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathbf{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

Cette dérivée s'annule en $x = \mathbf{e}$. Elle est positive sur $]0;\mathbf{e}]$ et négative sur $]\mathbf{e};+\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

3. Calculons les limites. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\mathbf{e}^0 = 1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
$f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\frac{\ln(\mathbf{e})}{e}} = \mathbf{e}^{\frac{1}{e}}$.
$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}\left(= \frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} = \mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.

x	0		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	$\mathbf{e}^{\frac{1}{\mathbf{e}}}$	$\searrow$	1

<u>Exercice 6</u>: On va utiliser le fait que pour tout réel x, on a : $\mathbf{e}^x \geqslant x + 1$. Soit $n \geqslant 2$.

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \text{ donc } \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ donc } \mathbf{e} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\mathbf{e}^{-\frac{1}{n}} \geqslant 1 - \frac{1}{n} \text{ donc } \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{-n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \text{ donc } \mathbf{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

<u>Exercice 7</u>:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x) + \sin(2x) = \sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) = \sin(x)(1 + 2\cos(x))$.
$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(0)$ ou $\cos(x) = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\Leftrightarrow x = 0[\pi]$ ou $x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On reconnaît le début d'une identité remarquable.
$\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 \Leftrightarrow (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2\cos^2(x)\sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow -2\cos^2(x)\sin^2(x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos(x)\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0[\frac{\pi}{2}]$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) = 2\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)\big) = 2\big(\sin(\frac{\pi}{3})\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{3})\sin(x)\big) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$
Donc, $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) < 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-x \in]-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi[,\ k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow -x \in]-\frac{3\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi[,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x)+\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = -1$ car $\{x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=0\}$ n'est pas dans l'ensemble des solutions.
$\sin(x)+\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}[\pi]$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \sin(2x)+(\sin(x)+\sin(3x)) = \sin(2x)+2\times\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)$
$= \sin(2x)+2\sin(2x)\cos(x)$
$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x)(1+2\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{-1}{2}$
$\Leftrightarrow x = 0[\frac{\pi}{2}]$ ou $x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = \cos(x)$. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1 < 0 \iff 2y^2-3y+1 < 0$. Or, $2y^2-3y+1 = 2(y-1)(y-\frac{1}{2})$. Cette quantité étant strictement négative entre $\frac{1}{2}$ et 1. Donc, $2y^2-3y+1<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < y < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{3}+2k\pi, 2k\pi\right[\cup \left]2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$

<u>Exercice 8:</u>

1. On étudie la fonction Arccos + Arcsin qui est dérivable sur $]-1,1[$ et de dérivée nulle. Donc cette fonction est constante à sa valeur en 0 qui est $\frac{\pi}{2}$. De plus, la formule reste vraie aux extrémités de l'intervalle.

2. On étudie la fonction en question qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et de dérivée nulle. Donc cette fonction est constante à sa valeur en -1 qui est $-\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante à sa valeur en 1 qui est $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Exercice 9:</u>

1. La fonction Arccos est définie sur $[-1,1]$ donc $D_f = [-1,1]$.
$\forall x \in [-1,1],\ \cos(2\operatorname{Arccos}(x)) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos}(x))-1 = 2x^2-1$.

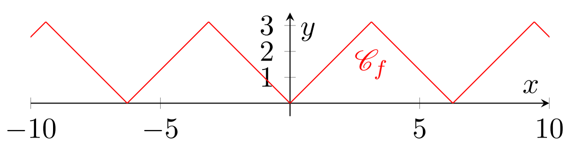
2. La fonction Arccos est définie sur $[-1,1]$. De plus, $\operatorname{Arccos}(x) \neq \frac{\pi}{2} \iff x \neq 0$ donc $D_g = [-1,1]\backslash\{0\}$.
$\forall x \in [-1,1]\backslash\{0\},\ \tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arccos}(x))}{\cos(\operatorname{Arccos}(x))} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

3. La fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc $h : [-1,1] \to [0,1]$.
$\forall x \in [-1,1], h^2(x) = 1-\sin^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1-x^2$. Or h est positive donc $\forall x\in[-1,1],\ h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

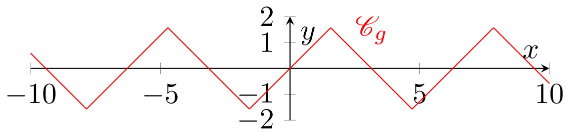
4. La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_k = \mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \cos(\operatorname{Arctan}(x))\times\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x\cos(\operatorname{Arctan}(x))$.
Or, $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\},\ 1+\tan^2(y) = \frac{1}{\cos^2(y)}$. Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction cos est positive donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$.
Donc, $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

<u>Exercice 10:</u>

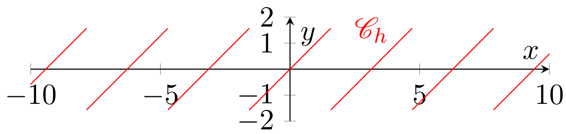
1. cos est à valeurs dans $[-1;1]$ donc $D_f = \mathbb{R}$. La fonction f est 2π-périodique et paire, on l'étudie donc uniquement sur $[0;\pi]$. Or par définition, $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$ pour tout $x\in[0;\pi]$.



2. sin est à valeurs dans $[-1;1]$ donc $D_g = \mathbb{R}$. La fonction g est 2π-périodique et impaire, on l'étudie donc uniquement sur $[0;\pi]$. Par définition, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$. De plus, pour tout $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$, $\sin(x) = \sin(x-\pi)$ et $x - \pi \in [-\frac{\pi}{2};0]$, d'où $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x - \pi$.



3. tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, d'où $D_h = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. La fonction g est π-périodique, on l'étudie donc uniquement sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Or, par définition, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.



Exercice 11:

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est à valeurs dans $[-1,1]$ (facile par étude de fonction) et la fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$ donc la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour la dérivabilité de h, nous devons retirer les antécédents par la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ de 1 et -1 car la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1. La fonction h est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, |\frac{2x}{1+x^2}| \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ comme composée de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned}\forall x \in \backslash\{-1,1\},\ h'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x.2x}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{(1+x^2)^2}}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,1]$ et de Arccos définie sur $[-1,1]$. Pour la dérivabilité, nous devons retirer les antécédents par la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}$ de 1 et les antécédents de 0 de $x \mapsto \frac{1+\sin(x)}{2}$.
   $\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\frac{1+\sin(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
   Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
   $f'(x) = \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1+\sin(x)}{2}}} = \frac{-\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{2}}} = \frac{-\cos(x)}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{-\cos(x)}{2|\cos(x)|} = \frac{-1}{2}\times\text{signe}(\cos(x))$.
   On en déduit une autre expression de f sur chaque intervalle où cos est de signe constant. Par exemple, $\forall x \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{-1}{2}$. Par ailleurs $f(0) = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $\forall x \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \frac{-x}{2} + \frac{\pi}{4}$

3. La fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}}$.
   La fonction $g : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{2}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}} = \frac{2\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}}$$

Donc, la fonction $x \mapsto 2\text{Arctan}(\text{e}^x) - \text{Arctan}(\text{sh}(x))$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ et est donc constante sur $\mathbb{R}$. Pour calculer cette constante, on calcule $2\text{Arctan}(\mathbf{e}^0) - \text{Arctan}(\text{sh}(0)) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 12: Posons, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) - 2\,\text{Arctan}(\sqrt{x})$. h est bien définie car si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $\frac{1-x}{1+x} \in]-1,1[$. Cette fonction est une somme de fonctions composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{2}{(1+x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Or, $(1+x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = (1+x)^2\sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}} = (1+x)^2\sqrt{\frac{2\times 2x}{(1+x)^2}} = (1+x)^2\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 2\sqrt{x}(1+x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = \frac{2}{(1+x)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{2}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = 0$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ égale à $h(1) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\,\text{Arctan}(\sqrt{x})$.
De plus, l'égalité reste vraie pour $x = 0$.